Pythagore,
sa réciproque par tangrams chinois

Pierre Rosenstiehl & Nicolas Brunelle

Séminaire de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales

Fabrication des plateaux : *Thierry Thibaudeau, architecte ébéniste*

Il y a 3800 ans à Babylone le Théorème de l'angle droit, attribué plus tard à Pythagore, hantait déjà les esprits ; ainsi l'atteste un manuscrit révélé par Georges Ifrah[1]. Aujourd'hui, on compte, selon Stella Baruk[2], jusqu'à 367 démonstrations différentes du théorème direct ; mais la plus ancienne, et peut-être la plus simple est celle par tangrams, apparue dans l'Arithmétique classique chinoise, appelée le Chou Pei[3, 4] (1100 av. JC).

Les preuves de la réciproque du théorème de l'angle droit (voir Euclide) sont moins nombreuses. Nous proposons ici des preuves du théorème direct et surtout de sa réciproque sans changer de paradigme : par simples manipulations de tangrams, soit huit répliques en bois mince d'un triangle, rectangle dans le premier cas, quelconque dans l'autre cas.

Trois problèmes vont suivre. Les as du puzzle devraient se passer des conseils proposés *en italique*.

1 Ifrah, G., *Histoire universelle des chiffres*, Robert Laffont, 1994.
2 Baruk, S., *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Le Seuil, 1992.
3 Contact : villemin.gerard.free.fr
4 Chemillier, M., *Les mathématiques naturelles*, Odile Jacob, 2007.

Démonstration par manipulation de tangrams seulement

Plateau I

Tangrams : 8 pièces minces identiques, bicolores par leurs faces, de la forme d'un triangle ***rectangle*** quelconque de côtés de mesures a, b, c avec : $c \geq a \geq b$.

Problème : agencer les tangrams de sorte à dessiner un carré de côté a + b contenant un carré de côté c. *On conseille d'assembler d'abord les tangrams deux par deux de sorte à former des rectangles d'une seule couleur et à amener à la suite les diagonales c en positions orthogonales*.

Solution : voir figure 1.

Mathématiques : l'aire du carré de côté c est constituée exactement d'un carré de côté a - b et de quatre triangles rectangles d'aires ab/2, d'où :

$c^2 = (a - b)^2 + 2\,ab$; ou $c^2 = a^2 + b^2$ (Pythagore, le théorème direct)

Plateau II

Tangrams : 4 pièces minces identiques, bicolores par leurs faces, de la forme d'un parallélogramme quelconque de côtés a, b , avec : $a \geq b$.

Problème : agencer les tangrams de sorte à dessiner un losange de côté a + b. (*On conseille pour 2 des tangrams de faire apparaître une même couleur et l'autre couleur pour les 2 autres*.)

Solution : voir figure 2, où selon deux axes obliques on a construit sur un premier tangram, à partir de l'un de ses sommets, un pavage en parallélogrammes d'abscisses respectivement b, a, a + b et d'ordonnées respectivement b, a, a + b.

Mathématiques : le grand losange de côté a + b et le petit losange de côté a - b ont les mêmes axes, lesquels sont orthogonaux. La symétrie par rapport à une droite quelconque du plan de deux tangrams de couleurs différentes (retournement) a engendré les angles droits.

Plateau III

Tangrams : 8 pièces minces identiques, bicolores par leurs faces, de la forme d'un triangle quelconque dont les mesures des côtés sont notées a, b, c avec : $c \geq a \geq b$.

Problème : agencer les tangrams de sorte à dessiner un losange de côté a + b. (*On conseille de faire apparaître une même couleur pour 4 des tangrams et l'autre couleur pour les 4 autres ; et de les constituer 2 par 2 en parallélogrammes en les collant par leurs côtés de mesure c en respectant les couleurs ; enfin de s'inspirer du Plateau II pour agencer les parallélogrammes*.)

Solution : voir figure 3.

Mathématiques : voir figure 4.

on note λ_1, λ_2 les mesures des demi diagonales du grand losange, d'où : $\lambda_1{}^2+ \lambda_2{}^2 = (a + b)^2$

on note μ_1, μ_2 les mesures des demi diagonales du petit losange, d'où : $\mu_1{}^2+ \mu_2{}^2 = (a - b)^2$

Le triangle rectangle d'hypothénuse c et de côtés de l'angle droit λ_1 et μ_2 donne la relation : $c^2 = \lambda_1{}^2+ \mu_2{}^2$. On note c' la mesure de la deuxième diagonale de ces parallèlogrammes.
Le triangle rectangle d'hypothénuse c' et de côtés de l'angle droit λ_2 et μ_1 donne la relation : $c'^2= \lambda_2{}^2 + \mu_1{}^2$; d'où :
$c^2 + c'^2 = 2\ a^2+ 2\ b^2$; en d'autres termes :

Théorème : la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme quelconque est égale au double de la somme des carrés de ses deux cotés. .

Revenons au triangle quelconque du Plateau III. Ajoutons l'hypothèse sur les mesures a, b, c :
$c^2 = a^2 + b^2$; il s'ensuite que :
$c'^2 = a^2 + b^2$; d'où
$c = c'$;
donc le parallélogramme de notre construction est un rectangle, car par pliages il apparaît que le rectangle est le seul parallélogramme ayant deux diagonales égales ; en d'autres termes :

Théorème : Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, alors le triangle est rectangle.
(Pythagore, la réciproque,). C.Q.F.D.

Figure 1 : solution du puzzle I

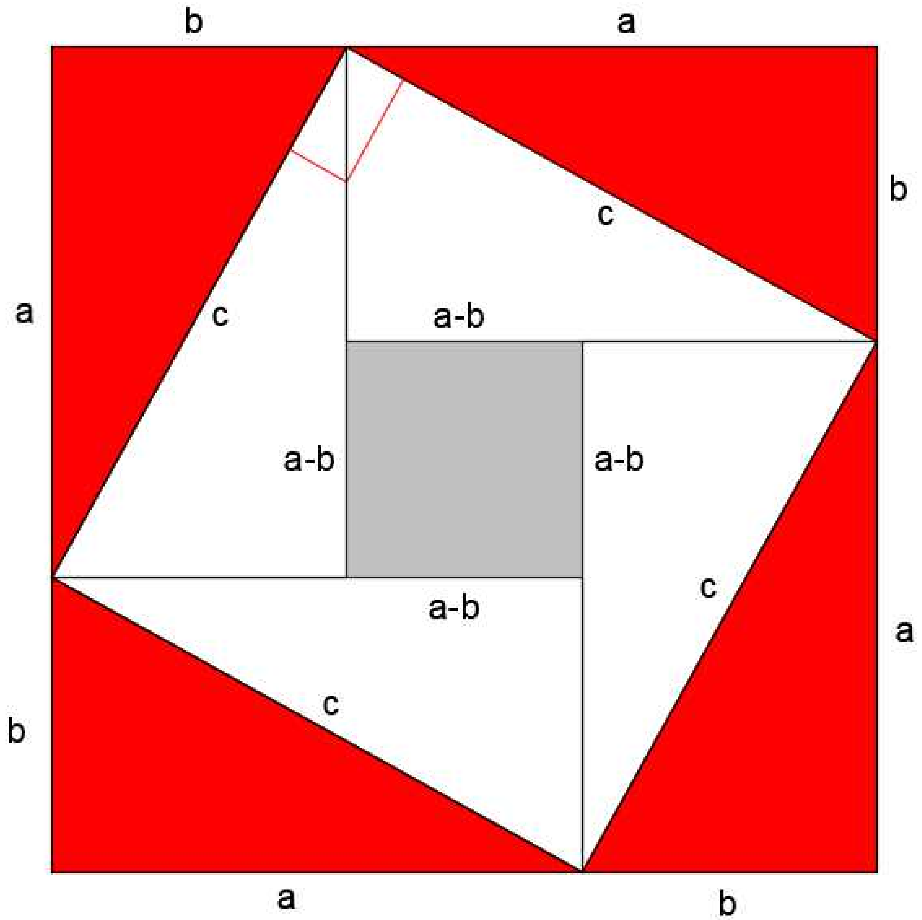

Figure 2
solution du puzzle II

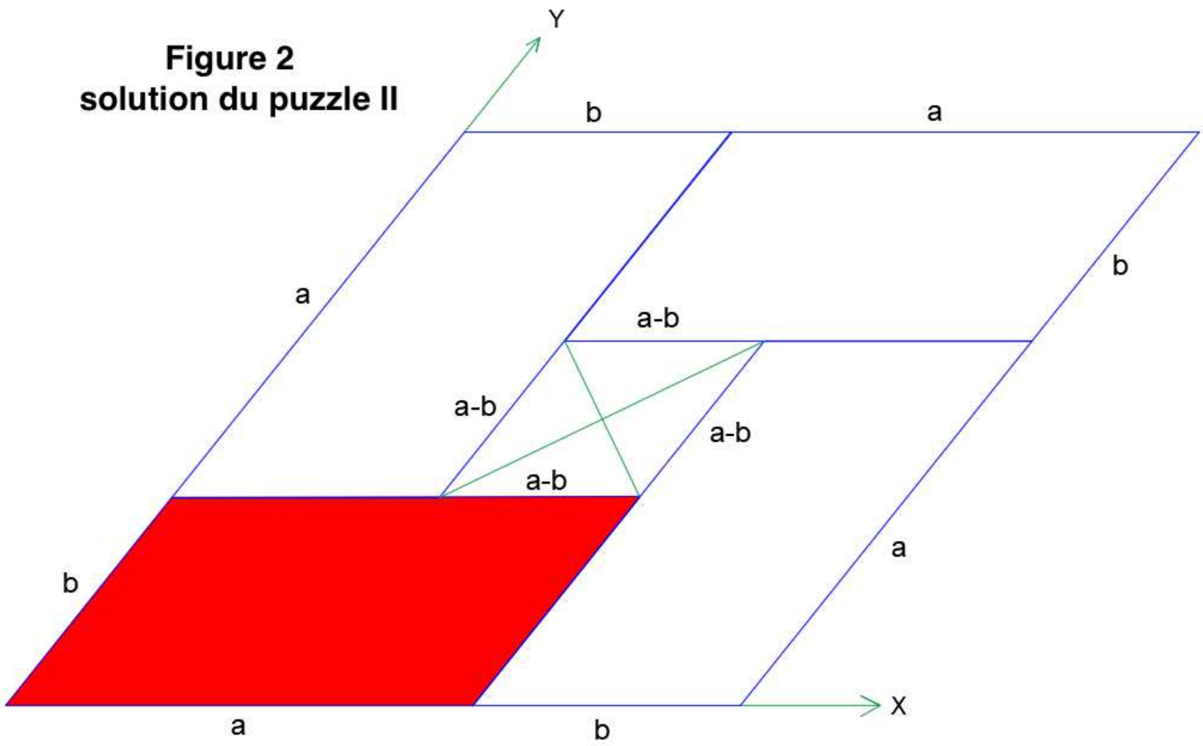

Figure 3
solution du puzzle III

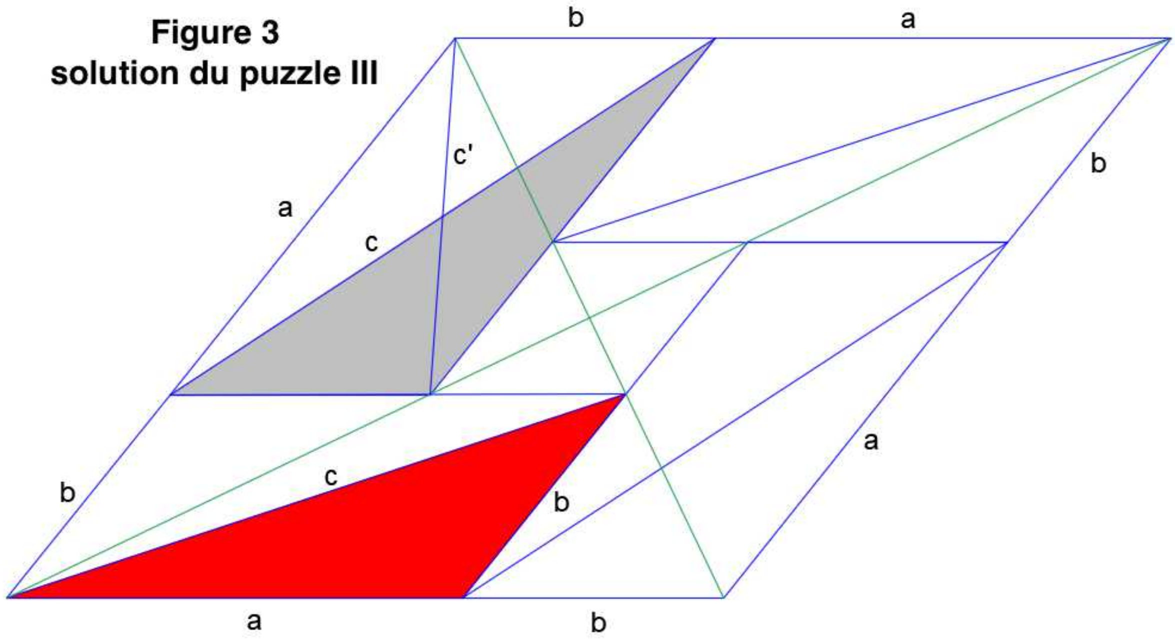

Figure 4

zoom sur la fig.3 pour le calcul