
Ethnomathématique

Harpes nzakara de Centrafrique

Dessins sur le sable de Vanuatu

Le théorème de Pythagore : hommage à Pierre Rosenstiehl (1933-2020)

Ce séminaire consistera à prendre connaissance de la trajectoire personnelle de Marc Chemillier qui l'a amené de la musique à l'ethnomathématique. Au départ, il s'est intéressé à la question de la modélisation dans son travail sur la musique et plus particulièrement sur un répertoire musical de Centrafrique. L'analyse de ces musiques l'a conduit à s'intéresser à un domaine qui commençait à se développer : l'ethnomathématique. Il a été amené à se documenter sur cette discipline il y a une vingtaine d'années, ce qui l'a conduit à prendre en considération certaines idées mathématiques, comme par exemple le théorème de Pythagore comme on le verra plus tard dans ce séminaire.

L'ethnomathématique est l'étude des idées mathématiques que l'on trouve dans des sociétés dites orales, c'est-à-dire sans écriture. Cette discipline a un côté paradoxal car elle prétend étudier les maths sans le support de l'écriture qui en est pourtant le fondement dans la tradition des mathématiques savantes.

Déroulé de la séance

En premier lieu, il s'agit de revenir sur son travail concernant les harpes nzakara, en Centrafrique dans les années 1990, puis de montrer en quoi cela a été le point de départ d'un intérêt pour l'ethnomathématique, puis pour la modélisation.

En second lieu, il s'agit d'étudier la tradition très riche des dessins sur le sable du Vanuatu, archipel situé dans les îles du Pacifique, non loin de la Nouvelle-Calédonie.

Pour terminer, nous reviendrons sur les mathématiques classiques avec l'exemple du théorème de Pythagore en expliquant la contribution de Pierre Rosenstiehl qui prolonge les réflexions de Marc Chemillier, et en quoi son texte se rattache à la question de l'ethnomathématique.

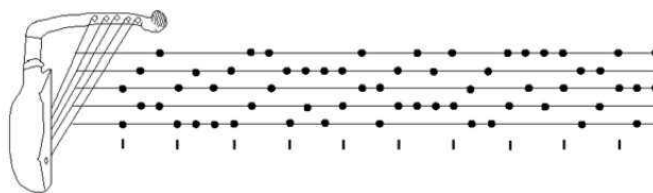
1) Harpes nzakara de Centrafrique

On retrouve ces harpes dans tout une région de l'Afrique centrale qui part de l'est, on la trouve dans l'Égypte antique et en Ouganda, et qui va à l'ouest jusqu'au Gabon. C'est tout une région où l'instrument est présent, souvent très richement décoré :



Les chevilles permettent d'accorder la harpe en réglant la pression des cordes. On trouvait souvent sur le manche des sculptures anthropomorphes, qui comptent parmi les chefs d'œuvre de la sculpture africaine.

Quelle musique produisent ces harpes?

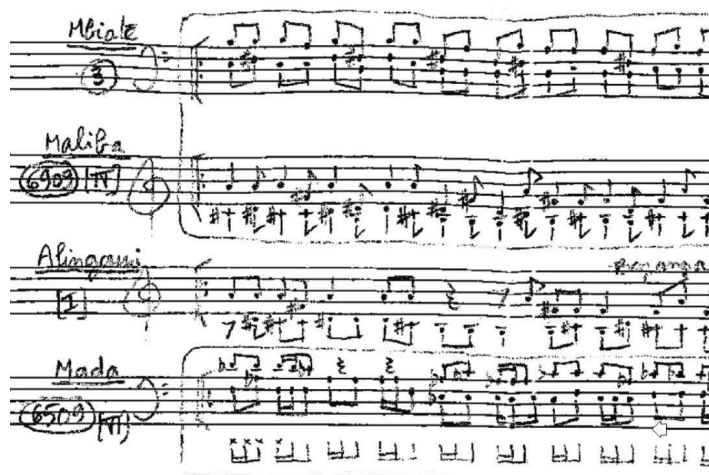


Il s'agit de gammes pentatoniques, le son des cordes est représenté sur des lignes horizontales avec le temps qui s'écoule de gauche à droite. Deux cordes sont pincées simultanément, créant une intervalle. Avec les cordes aiguës, on obtient un profil mélodique aigu. Et de même avec les cordes graves.

Sur cet instrument, le principe de jeu répété en boucle reste assez limité, laissant ainsi plus de place sur le plan vocal. Les poètes-harpistes produisent des improvisations de textes à la rhétorique assez complexe. Il existe une quarantaine de pièces de ce répertoire collectées et enregistrées par l'ethnologue Éric de Dampierre, spécialiste de la civilisation nzakara.

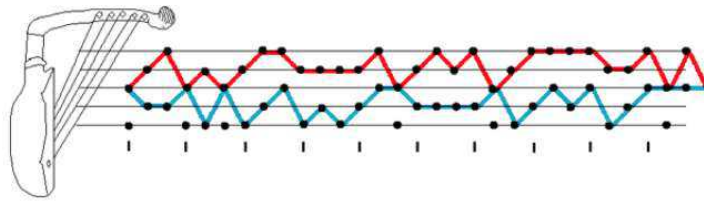
Marc Chemilier décide de faire une thèse sur ce répertoire de la harpe chez les Nzakara. Celui-ci était intrinsèquement lié à la vie de la cour royale avant la colonisation. Le professeur a fait des missions sur le terrain en amenant lui-même des instruments car ceux-ci étaient devenus très rares sur place du fait de l'influence coloniale. Il a également analysé des bandes magnétiques collectées par Eric de Dampierre.

En général, les ethnomusicologues font des transcriptions musicales en notation sur portées, c'est-à-dire dans le solfège occidental classique :

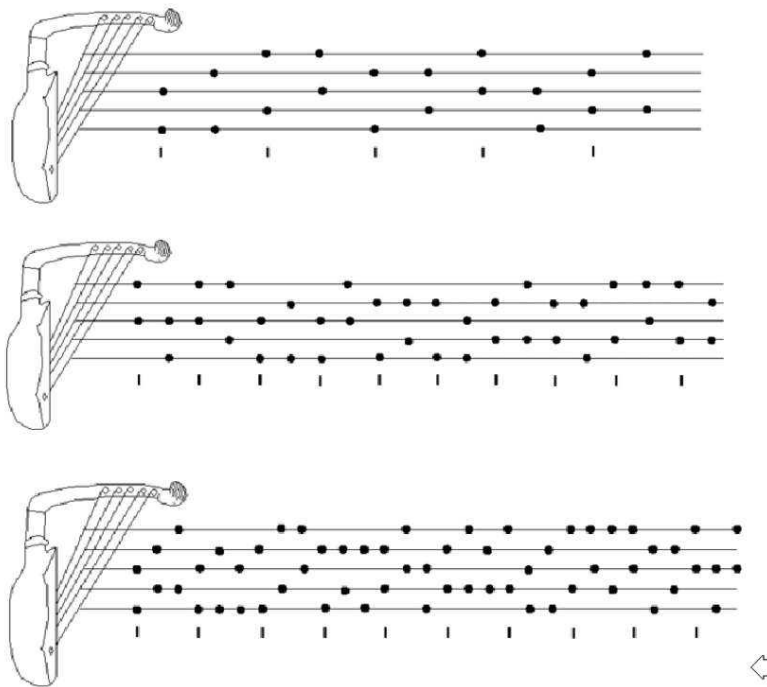


Dans ces différents exemples, on retrouve les mêmes caractéristiques, avec les deux mains qui sont pincées simultanément. Les rythmes sont également annotés, de même que les variations, et les versions sont identifiées par les numéros des bandes (6909, 6509, etc.). Il y a là une première tentative de trouver des régularités, des choses qui se répètent. En mettant des formules les unes au-dessus des autres, cela correspond à un travail de recherche d'équivalences entre formules, afin d'essayer de comprendre comment la pratique de cet instrument est organisée. Mais pour faire apparaître la structure, l'ethnomusicologue va gommer certaines variations rythmiques entre les notes, qui sont plus ou moins égales. Il

regarde également les différents profils graves et aigus, en faisant abstraction de l'échelle musicale et en les comparant avec un décalage. On observe alors que ces deux profils sont identiques :



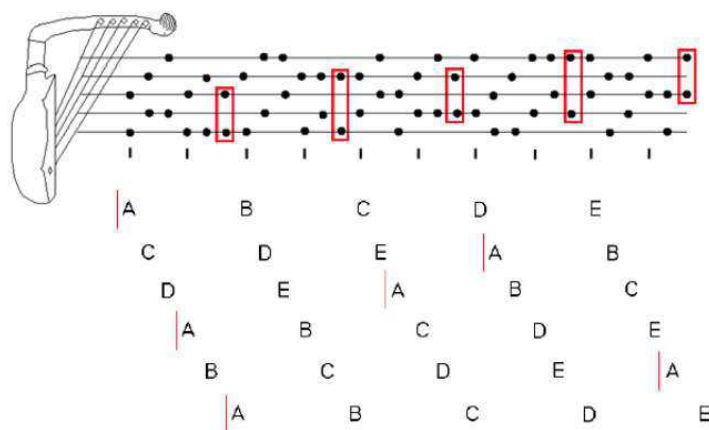
Le profil mélodique de l'une des mains est reproduit par l'autre main avec un décalage de six notes. C'est ce qu'on appelle un canon (technique portée à son apogée par Bach au XVIII^e). Chemillier a commencé à travailler sur la harpe en 1989. Il lui a fallu six années pour mettre en place ce type de représentation et pour énoncer des propriétés générales, puisqu'au départ, **il était noyé dans un ensemble de transcriptions musicales qui ne lui permettaient pas de réaliser les équivalences nécessaires.**



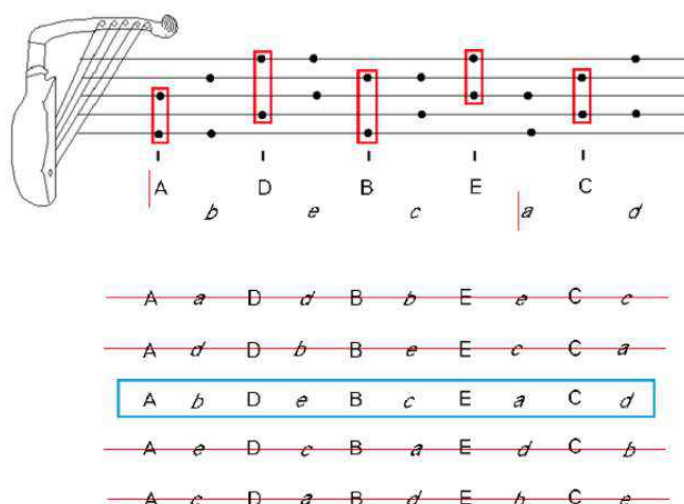
- L'ensemble du répertoire fait apparaître plusieurs exemples de canons.

Pourquoi et comment ? Les formules de harpe sont construites de manière rigoureuse. Il y a cinq couples de cordes. L'ordre de succession est toujours le même et les différentes permutations de ces cinq couples de cordes sont entrelacées. C'est un répertoire de harpe situé en plein centre de l'Afrique, dans un contexte de tradition orale : comment est-il possible de trouver de telles structures dans ce contexte ?

On observe ainsi d'autres propriétés :



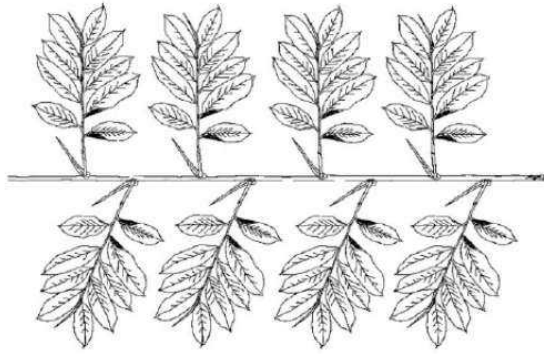
Lorsqu'un informaticien comprend le principe d'agencement, il se demande s'il peut en générer d'autres automatiquement. Quels problèmes cela pose-t-il de mettre au point l'outil informatique adéquat ? Peut-on fabriquer d'autres formules ? Peut-on inventer d'autres séquences avec le même principe de construction ? Il y a deux permutations circulaires d'une même succession qui sont emboîtées l'une dans l'autre. Avec cinq éléments, il est assez facile de faire cela, puisque l'on part du principe qu'il y a seulement cinq permutations possibles. Mais elles ne donnent pas toutes des solutions valables :



Si on essaie d'appliquer le principe mis en évidence, il n'existe au final qu'une seule manière de le faire, qui donne la formule A b D e B c E a C d. Les formules sont donc construites de manière systématique.

Eric de Dampierre, ethnologue spécialiste de la civilisation nzakara, n'était pas musicologue mais connaissait très bien les Nzakara. Selon lui, une chose est très importante dans la civilisation nzakara : le principe de singularité. Dans son ouvrage *Penser au Singulier*¹, il explique la manière dont il a été très frappé par un certain trait de la façon de penser nzakara, qui consiste à refuser l'identité de deux choses. Par exemple la naissance de jumeaux serait un signe de désordre. Chez les Nzakara, cela nécessite donc un rituel particulier. On va utiliser une plante aux propriétés non médicinales, mais à la géométrie particulière :

¹ Eric de Dampierre, *Penser au singulier*, Société d'ethnologie, 1984, 54 p.



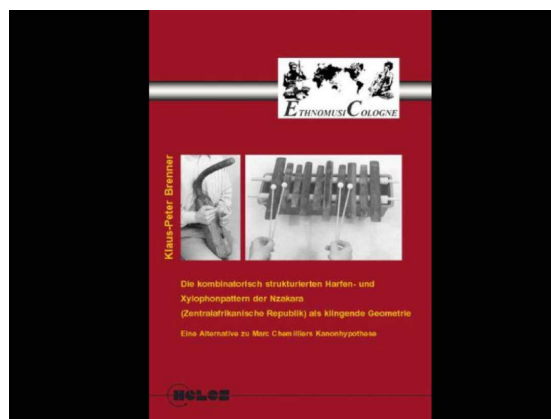
Cette plante a deux particularités : les deux rangées de feuilles ne sont pas dans un même plan et ne sont pas symétriques. C'est en faisant une rotation de 90 degrés et en les décalant que les deux rangées se recouvrent. Similairement à la plante, cette façon de penser pouvait expliquer l'existence de formules de harpe au canon, décaler deux séquences trop semblables pour conjurer une identité similaire.

De plus, la structure de certaines têtes de harpe en particulier intéressait beaucoup de Dampierre :



Si l'on schématise la coiffure de cette figure, on voit qu'il y a deux composantes, une composante constituée de tresses parallèles au cercle extérieur, et pour obtenir l'autre composante, on inverse les tresses et on fait une rotation. En assemblant les deux composantes, on obtient la coiffe complète. On a deux choses semblables, dans lesquels on introduit des transformations qui permettent d'atténuer cette similarité. Dans le cas de la plante «bisibili», il faut donc mettre les deux pans perpendiculaires et les décaler. Puis dans le cas des formules de harpes, on reproduit le profil mélodique, et on décale la séquence.

Qu'est-ce-que les nzakararas pensent de ce travail effectué sur ces harpes ? Dans quelle mesure les idées formulées par les anthropologues ont un sens pour les personnes concernées ?



Un ethnomusicologue, Klaus-Peter Brenner, a publié un livre pour contester de travail de Marc Chemillier. Selon lui, il est impossible que les Nzakara aient eu conscience du fait qu'ils jouent en canon sur la harpe. Pour lui, ce que les musiciens jouent à la harpe pourrait en fait être inspiré par le jeu des xylophones portatifs qui correspond à des duos de harpes. Deux harpistes jouant de façons alternées pourraient être une manière simple d'engendrer ces cycles entrelacés, et c'est plutôt cela qui serait plausible sur le plan cognitif. Cette question reste ouverte, et ne peut être résolue que par une enquête de terrain.

Questions des participants

Sarra Braham : Existe-t-il des harpistes encore aujourd'hui, malgré la fragilité de cette tradition?

Pas pour le répertoire des formules qui étaient liées au système monarchique qui a précédé la colonisation. D'ailleurs, l'histoire des canons ne s'applique qu'aux formules de harpes liées à la vie de cour. Les harpistes jouaient d'autres formules, non basées sur ces principes-là, plutôt rythmiques.

Yuri Prado : Sur quoi se basait l'auteur Klaus-Peter Brenner ?

L'auteur a rassemblé un faisceau de présomptions. Les formules de harpe peuvent être vues comme des canons, mais aussi comme des successions de couples qui étaient entrelacées. Mathématiquement, les deux constructions sont équivalentes. Le discours de Brenner revient à dire que c'est le deuxième point de vue qui est valable et possible cognitivement. Cela peut se comprendre car on imagine que, s'il y a deux musiciens qui jouent avec des décalages, on obtient la combinaison des deux.

Paul Albenge : Sur le plan des hauteurs, il n'y a pas identité des mélodies, le canon est donc gestuel ?

Oui, lorsqu'il y a une note répétée dans le grave, on entend cette réponse à travers le filtre de la gamme utilisée. C'est comme chez Bach, on a l'énoncé du sujet et une réponse à la quinte.

Quand est-il du médium visuel ?

Il n'y a pas de traces écrites. La question est d'ordre cognitive. Sur le plan de la verbalisation, on note quelques expressions, formulations qui se rapportent aux gestes. Dans cette verbalisation, les indices montrent qu'ils sont conscients qu'un geste d'une main est semblable à l'autre avec un décalage.

Marius Bouillet-Peralta : Qu'observe-t-on de l'instrument en rapport avec la religion ?

Eric de Dampierre n'était pas musicologue, mais s'intéressait beaucoup à l'artisanat de l'instrument. Dans un ouvrage à ce sujet, il parle beaucoup de l'instrument d'un point de vue ethnographique, des symboles associés, de la cosmologie, etc. Il n'y a rien qui puisse se relier d'une manière ou d'une autre à l'analyse musicale. Il démontre toutefois que la sculpture anthropomorphe représente la parole de la harpe. La harpe est considérée comme dangereuse, puisqu'elle est utilisée pour l'éloge du pouvoir, lorsque le souverain parle, mais aussi pour sa contestation. Ainsi il existe une autre utilisation de la harpe, pour dénoncer de façon plus critique le pouvoir. Si un musicien se trompait de formule, il risquait la peine de mort.

Yohann Moreau : Quelle musique pour quelle protestation ?

Les formules sont toutes traditionnelles, ce ne sont pas les musiciens qui les composent. Le répertoire est partagé. Ce qui est propre aux musiciens chanteurs, ce sont les textes, les chants improvisés sur les formules de harpe. Ces formules sont divisées en catégories, liées à des rituels ou à des danses des Nzakara. On ne peut pas utiliser ces formules pour se moquer du roi. En revanche, d'autres types de formules asymétriques sont importées des populations voisines, aux marges du royaume et donnent lieu à des danses plus populaires, non pratiquées

dans la cour. Sur ces airs-là, les musiciens chanteurs vont pouvoir improviser des textes critiques. Eric de Dampierre publie un recueil de poème intitulé *Satires de Lamadani* qui répertorie ces textes satiriques, non basées sur les airs de cour. La rhétorique nzakara est très complexe, même ésotérique, que les gens ne comprennent pas forcément. Eric de Dampierre avait décodé tout ça.

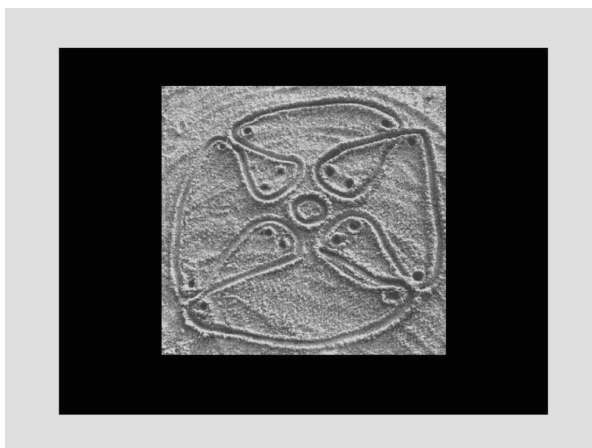
Ngendakuaman : Comment fonctionne la parenté chez les Nzakaras ?

Cette civilisation est organisée avec des lignages, des clans. Chaque lignage est nommé d'après un ancêtre éponyme. Les Nzakara ont un clan dominant particulier qui était le clan Bandia.

2) Dessins sur le sable de Vanuatu

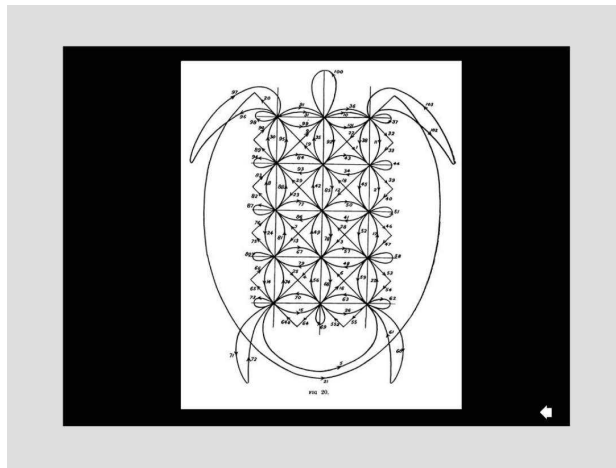


Il existe plusieurs auteurs qui abordent le sujet des dessins sur le sable du Vanuatu. L'aspect géométrique de ces œuvres d'art a en effet beaucoup intéressé les mathématiciens. L'ethnomathématique est un domaine qui a été initié par les pédagogues des maths. Souvent, ce sont des mathématiciens qui sont tombés sur des récits ethnologiques, et qui se sont mis à réfléchir sur ces activités. Chaque île du Vanuatu produit des dessins aux styles assez différents.

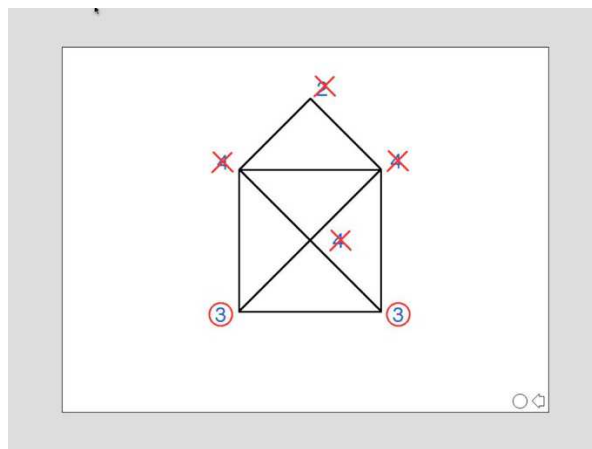


Quatre roussettes en train de manger un fruit

Le principe est de tracer des points, et ensuite d'enrouler le sillon autour de ces points. Dans les années 1930, l'anthropologue Bernard Deacon a collecté ces dessins en relevant leur caractère complexe. Il a non seulement reproduit la figure, puis il a également reproduit la manière dont elle a été tracée, avec des numéros :

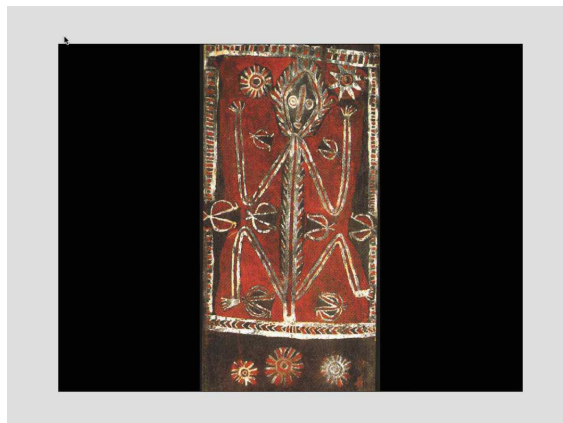


La numérotation des tracés rattache cette pratique à la théorie des graphes. Cette théorie mathématique est née au XVIII^e siècle à partir d'un jeu récréatif, tel que le jeu de l'enveloppe :

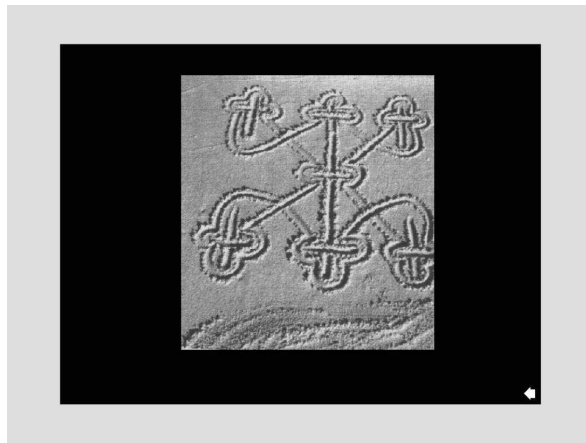


Pour dessiner l'enveloppe d'un seul coup de crayon, il faut commencer par un sommet impair pour aller vers un sommet impair afin d'effectuer le tracé sans lever la main.

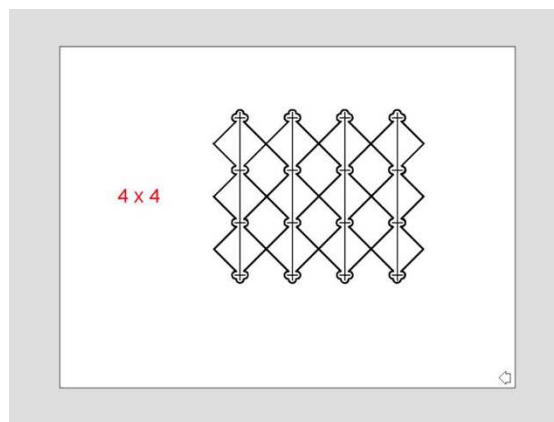
La tradition du Vanuatu est également figurative, telles que les peintures sur bois qui représentent des esprits, figuratifs et abstraits à la fois :



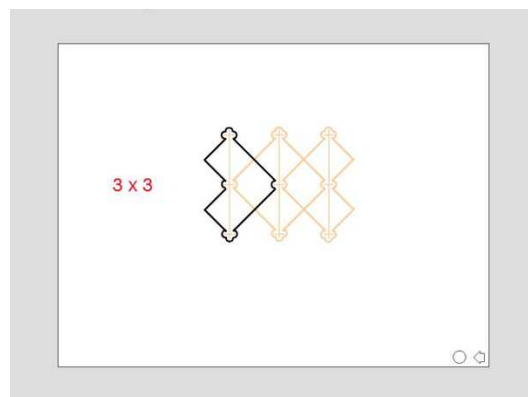
Dans la figuration sur le sable, l'abstraction est poussée plus loin dans la représentation d'esprits comme celui de la peinture sur bois mais où l'abstrait finit par l'emporter sur le figuratif :



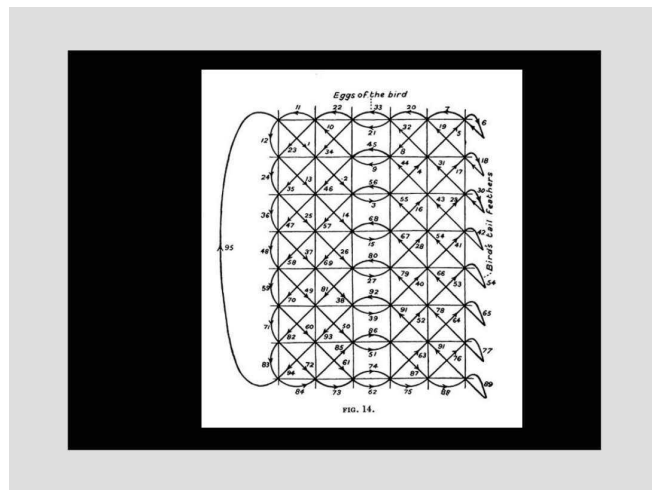
On peut multiplier ces dessins avec plusieurs colonnes et explorer différentes combinaisons grâce au caractère abstrait du dessin. Du point de vue du tracé, il faut utiliser une ligne continue. On ne peut pas repasser sur un segment déjà tracé. Cela devient possible dans la configuration 4x4 colonnes :



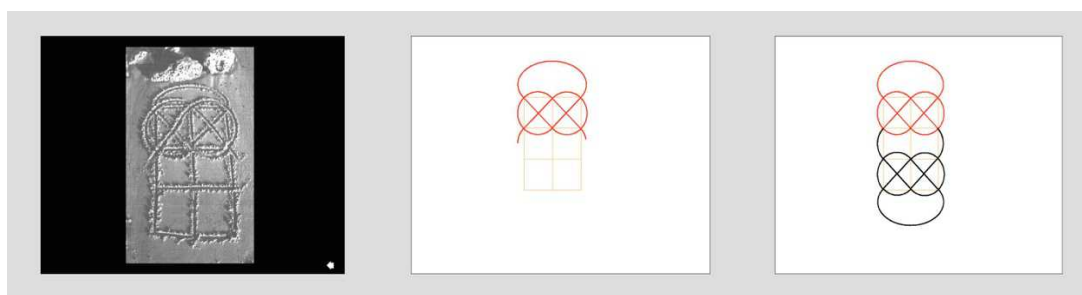
Ce ne peut pas, en revanche, être le cas avec n'importe quel nombre de lignes et de colonnes. Par exemple avec 3x3, on ne peut pas tracer tout le dessin d'un seul coup:



Les populations qui pratiquent ces dessins sont donc conscients que certains tracés sont possibles et d'autres non, mais comment l'expriment-ils ? La question ethnomathématique se pose.

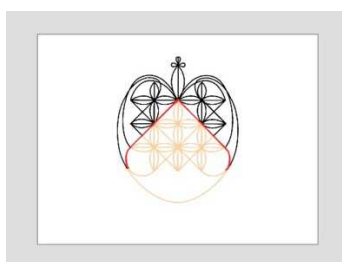


Dans la figure précédente d'un « oiseau dans son nid », les « œufs » – boucles situées au centre du dessin – représentent l'algorithme qui a permis de passer d'un dessin non traçable en ligne continue à un dessin traçable en ligne continue. Nous pouvons rassembler d'autres éléments dans le discours des gens du Vanuatu à propos de ces dessins qui montrent qu'ils ont une attitude réflexive par rapport au tracé du dessin.



Épreuve éphémère du récit.

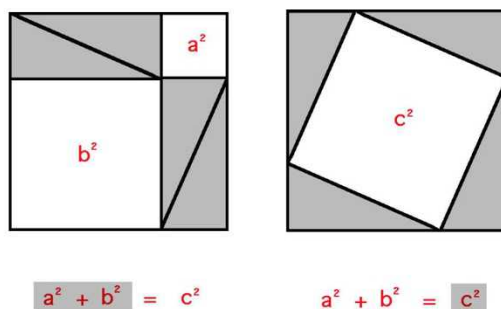
Le dessin ci-dessus est une épreuve qui permet d'accéder aux territoires des ancêtres. Pour se faire, il faut finir le dessin, à l'identique, afin de le compléter en ligne continue. Le tracé est donc directement impliqué dans le récit. Cet autre exemple ci-après montre un dessin qui représente le fruit de l'arbre à pain. Le fruit est apprécié par les rats puisque le dessin s'intitule « le fruit de l'arbre à pain mangé par les rats » :



Lorsque l'on dessine cette figure, on repasse sur une ligne déjà tracée. En violant la règle, la faute est rejetée sur le rat, en déclarant que les rats ont mangé le fruit de l'arbre à pain. Par conséquent, le tracé est délibérément effacé. Ainsi le tracé et la règle interviennent dans le récit lui-même. L'ethnomathématique s'est donc grandement intéressé à ce phénomène. Il n'existe à ce jour pas d'études d'ordre cognitif, en particulier, sur la manière dont sont conçus ces dessins, qui n'ont été étudiés que d'un point de vue mathématique.

3) Le théorème de Pythagore : hommage à Pierre Rosenstiehl (1933-2020)

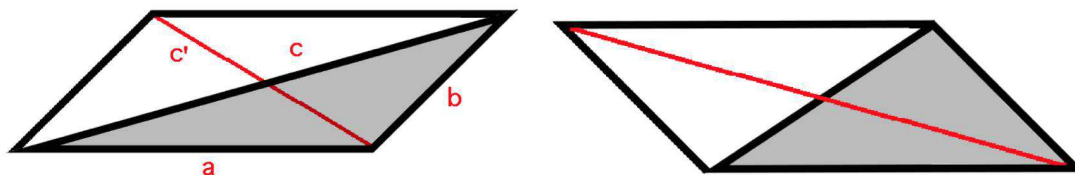
Les exemples de dessins sur le sable sont rassemblés dans le livre *Les Mathématiques naturelles* de Marc Chemilier². Dans quelle mesure peut-on dire qu'il y a quelque chose de mathématique dans cette pratique ? Est-ce que ces activités décrites par des anthropologues sont des mathématiques ? Un exemple intéressant pour étudier cela est l'exemple du théorème de Pythagore.



Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. La manière de faire glisser les surfaces permet de donner une expression purement concrète avec des pièces en bois que l'on peut déplacer. Il y a les mathématiques très élaborées publiées dans les revues académiques qui passent par un formalisme écrit permettant de faire des calculs. Mais il subsiste également des possibilités de faire des mathématiques avec des artefacts plus concrets (comme des pièces en bois que l'on va déplacer) et qui permettent d'exprimer des propriétés, qui constituent l'ethnomathématique. Dans la tradition orale, on peut avoir des propriétés élaborées qui passent uniquement par des choses orales et souvent liées à des objets manipulés.

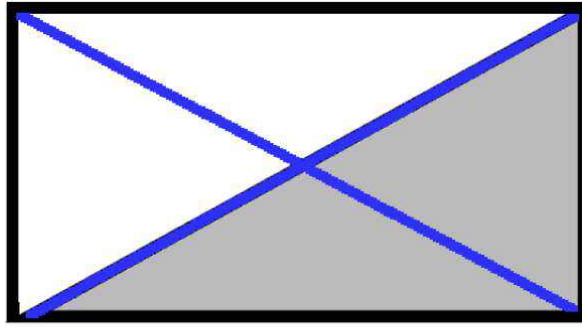
Pierre Rosenstiehl, qui avait lu le livre de Marc Chemilier, fût frappé par l'exemple du théorème de Pythagore : si un triangle est rectangle, alors forcément le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Mais il y a une réciproque du théorème : si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, alors le triangle est forcément rectangle.

Le professeur Rosenstiehl évoquera par la suite l'idée suivante :



Cela consiste à prendre une copie d'un triangle et à en faire un parallélogramme. Selon l'angle du triangle, la parallélogramme va avoir une diagonale plus grande que l'autre. Le cas où les deux diagonales sont égales se produit lorsque le parallélogramme est constitué de deux triangles rectangles :

² Marc Chemilier, *Les Mathématiques naturelles*, Odile Jacob, Paris, 2007, 238 p.



si $c = c'$ alors c'est un rectangle (principe des étagères IKEA)

Formule magique valable pour TOUS les parallélogrammes :

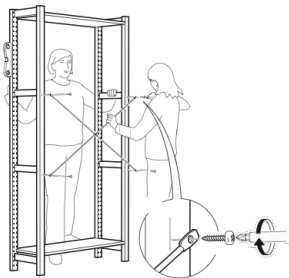
$$c^2 + c'^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)$$

que se passe-t-il si $c^2 = a^2 + b^2$?

alors $c = c'$ donc le triangle est rectangle = réciproque de Pythagore

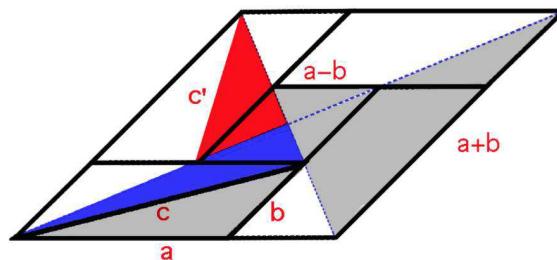
Exemple du meuble Ikea

3



Pour que les étagères restent verticales, il faut disposer d'une pièce indispensable qui est le croisillon : ses deux tiges en fer sont de même longueur. La réciproque est la suivante : si les deux diagonales sont de même longueur, l'étagère restera stable. L'argument de Pierre Rosenstiehl est le suivant : montrer que $c = c'$.

Pour la construction avec des pièces en bois, on prend deux tangrams du triangle initial, et on en fait trois copies :



On obtient une nouvelle figure, qui est plus régulière. Ce n'est plus un parallélogramme, mais la figure devient un losange. **Ses 4 cotés sont égaux, donc ses deux diagonales forment forcément un angle droit.** Dès lors, plusieurs triangles rectangles apparaissent. On peut donc imaginer que l'on peut raisonner sur cette figure avec des pièces en bois, et donc le c^2 et le c'^2 peuvent s'exprimer avec les tangrams en fonction des deux autres côtés du triangle initial a et b .

Pierre Rosenstiehl était une figure exceptionnelle du CAMS (Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS), qui s'est beaucoup intéressé aux graphes et aux réseaux. L'une des choses remarquables réside dans le fait que son article sur les graphes a eu une influence considérable dans le travail de Gilles Deleuze et Felix Guattari sur la théorie du rhizome³.

Le logiciel d'improvisation Djazz peut se rattacher à un courant de l'informatique très présent actuellement et qui fonctionne par apprentissage. Les algorithmes d'apprentissage sont omniprésents dans notre environnement (dans les téléphones par exemple). Comment peut-on caractériser un algorithme dans lequel on ne comprend pas forcément ce que l'on fait, mais qui est capable d'imiter, par exemple en reproduisant des séquences musicales ? C'est ce que Marc Chemillier fait avec le logiciel d'improvisation Djazz : à partir de ce qu'un musicien joue, le logiciel reproduit le jeu du musicien. Le logiciel a très peu de connaissances musicales, mais il est capable d'enregistrer les traces de ce que l'on joue, de les mémoriser et de les reproduire.

Cette idée peut être reliée à ce que disent Deleuze et Guattari de la notion de rhizome. Il s'agit d'une structure évoluant en permanence, dans toutes les directions horizontales, et dénuée de niveaux. Elle vise notamment à s'opposer à la hiérarchie en pyramide. Dans leur article, ils s'en prennent à Chomsky, car pour ce dernier, la grammaire générative postule que n'importe quelle phrase dérive d'un atome S (sentence) : on a une structure arborescente, avec groupe nominal et verbal, etc. La structure hiérarchique représente la grammaire de la phrase. Derrière cette structure arborescente, il y a toujours cette idée de pouvoir, de discipline, qui est induite par le modèle lui-même, qui inclut cette idée de hiérarchie. Il faudrait donc s'intéresser à un autre modèle. Avec la prolifération d'algorithmes d'apprentissage et avec les théories cognitives de réseaux de neurones, nous nous retrouvons dans des systèmes sans « modélisation », au sens où il n'y a pas d'explications du phénomène. L'article de Rosenstiehl et le concept de rhizome ont eu une descendance importante si l'on considère qu'ils se retrouvent, d'une certaine manière, dans les algorithmes d'apprentissage.

Bibliographie sélective

[Transparents de la séance](#)

Marc Chemillier, Représentations musicales et représentations mathématiques, *L'Homme*, numéro spécial Musique et anthropologie présenté par Bernard Lortat-Jacob et Miriam Røvsing Olsen, 171-172, 2004, p. 267-284 ([en ligne](#)).

Éric de Dampierre, *Harpes zandé*, Paris, Klincksieck, 1992.

Marc Chemillier, [La logique de la longue ligne Vanuatu](#), conférence au Musée des Arts d'Afrique et d'Océanie (30 octobre 1997).

Marc Chemillier, *Les Mathématiques naturelles*, Odile Jacob, 2008 (p. 167 sur Dan Sperber, p. 130 sur Jean-Marie Schaeffer).

Dan Sperber, *Le Symbolisme en général*, Paris, Hermann, 1974 (p. 91 à propos des homologies et des inversions dans la "mémorabilité" d'un texte).

Jean-Marie Schaeffer, Objets esthétiques, *L'Homme*, n° 170, 2004 (p. 42 sur les "signaux coûteux" en esthétique et dans les parades nuptiales chez les animaux, [en ligne](#))

Pierre Rosenstiehl & Nicolas Brunelle, *Pythagore, sa réciproque par tangrams chinois*, texte inédit, [février 2020 \(pdf\)](#).

[Vidéo sur Pierre Rosenstiehl Les belles mathématiques 2006](#) (voir aussi son roman *Le Labyrinthe des jours ordinaires*, Seuil, 2013)

³ Gilles Deleuze, Felix Guattari, *L'Anti-Œdipe* (vol. I), *Mille Plateaux* (vol. II), Paris, 1972, 494 p.

Pierre Rosenstiehl, Jean Petitot, Automate asocial et systèmes acentrés, *Communications*, 22, La nature de la société, 1974, p. 45-62 ([en ligne](#)).

Gilles Deleuze, Félix Guattari, Rhizome [1976], *Mille Plateaux. Capitalisme et schizophrénie II*, Editions de Minuit, 1980 ([pdf](#)).