Master ATIAM - 26 février 2014

MMIM : Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie I : Informatique théorique

Marc Chemillier

Cette partie sera rédigée sur une copie à part. Elle est notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1

1a- Calculer la fonction d'échec de Morris & Pratt pour le mot $u = ababa$.
1b- Cette fonction est-elle identique à celle qui donne le lien suffixiel des états de l'oracle des facteurs pour le même mot ? Expliquer pourquoi.
1c- Construire un automate déterministe AFD reconnaissant les mots qui se terminent par u.

Question 2

On considère le langage L des mots sur $\{a, b\}$ ayant un nombre pair de a et un nombre impair de b.
2a- Donner une définition des ensembles $a^{-1}L$ et $b^{-1}L$ associés à ce langage, puis faire de même en appliquant a^{-1} et b^{-1} à tous les nouveaux ensembles obtenus jusqu'à ce qu'on n'obtienne plus d'ensembles différents des précédents.
2b- En déduire un automate reconnaissant L.

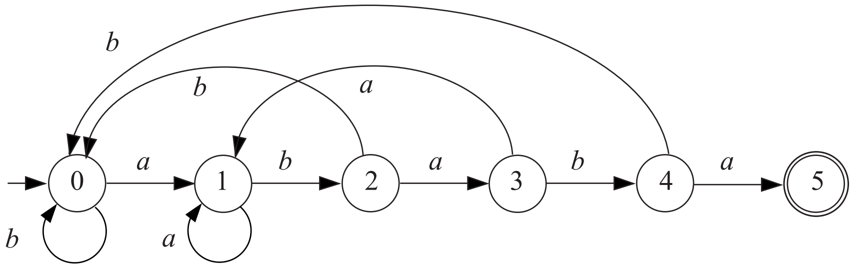
Question 3

On considère le mot $u = aabbcaccbacaaabccaaacbb$.
3a- On dit qu'un mot est *croissant* si chaque lettre de ce mot est inférieure ou égale pour l'ordre alphabétique à celle qui la suit dans ce mot. Donner la décomposition de u en mots croissants de longueur maximale.
3b- Montrer qu'un mot croissant contenant au moins deux lettres distinctes est un mot de Lyndon.
3c- En factorisant certains mots croissants de la décomposition de u obtenue en **3a**, déduire une factorisation de u en mots de Lyndon croissants. Puis en regroupant certains facteurs de cette décomposition, donner la décomposition de u en une suite décroissante de mots de Lyndon. On justifiera les regroupements effectués en utilisant une propriété vue en cours pour la concaténation de deux mots de Lyndon.

<u>Réponse1a</u>
fonction d'échec Morris & Pratt : *ababa*

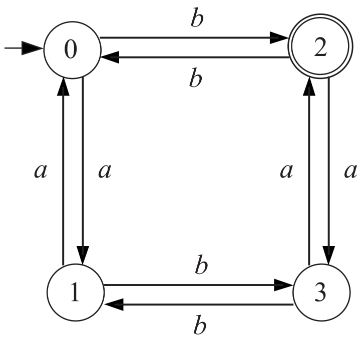
État p	0	1	2	3	4	5
$f(p)$		0	0	1	2	3

<u>Réponse 1b</u>
-> même fonction que pour l'oracle : les plus longs suffixes répétés sont aussi préfixes
<u>Réponse1c</u>



<u>Réponse 2a</u>
L = nbre pair de a + nbre impair de b = état 0
$a^{-1}(L)$ = impair de a + impair de b = L' = état 1
$b^{-1}(L)$ = pair de a + pair de b = L'' = état 2
$a^{-1}(L')$ = pair de a + impair de b = L
$b^{-1}(L')$ = impair de a + pair de b = L'''
$a^{-1}(L'')$ = impair de a + pair de b = L''' = état 3
$b^{-1}(L'')$ = pair de a + impair de b = L
$a^{-1}(L''')$ = pair de a + pair de b = L''
$b^{-1}(L''')$ = impair a + impair b = L'

<u>Réponse 2b</u>



<u>Réponse 3a</u>
décomposition en mots croissants maximaux :
(*aabbc*)(*acc*)(*b*)(*ac*)(*aaabcc*)(*aaac*)(*bb*)
<u>Réponse 3b</u>
soient a = 1ère lettre de w et b = 1ère lettre apparaissant dans w distincte de a => $w = a^n bv$
w croissant => $a < b$
toutes les rotation de w sont > w, en effet :
$a^{(n-p)}bva^p > a^n bv$
$bva^n > a^n bv$
toutes les lettres de v sont > a, donc tous les suffixes de v commencent par une lettre > a
<u>Réponse 3c</u>
décomposition de u en mots de Lyndon croissants :
(*aabbc*)(*acc*)(*b*)(*ac*)(*aaabcc*)(*aaac*)(*b*)(*b*)
décomposition Lyndon décroissante :
(*aabbcaccbac*)(*aaabccaaacbb*)