

MMIM : Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

Partie I : Informatique théorique

Marc Chemillier

Cette partie sera rédigée sur une copie à part. Elle est notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

Question 1

On considère le mot $u = 332332332$.

1a- Calculer les mots cumulés de u et vérifier que u est un mot maximalement réparti.

1b- En examinant toutes les rotations de u , vérifier que u est impair rythmiquement.

1c- Montrer que les puissances paires x^{2k} d'un mot ne sont jamais impaires rythmiquement. Si x est un mot impair rythmiquement, montrer que ses puissances impaires x^{2k+1} le sont toujours.

Question 2

2a- Calculer l'oracle des facteurs du mot $u = abcabcabc$. Faire un tableau représentant la fonction qui donne le lien suffixiel de chaque état.

2b- Calculer la fonction d'échec de Morris & Pratt pour le mot même $u = abcabcabc$. Que remarque-t-on par rapport à la question précédente ?

Question 3

On considère le langage $L = \{abc, bac, abd, bad\}$.

3a- Calculer les ensembles $u^{-1}L$ associés à ce langage.

3b- En déduire un automate reconnaissant L . Le langage L se factorise-t-il comme un jeu de dés musicaux ?

Réponse 1a = 3 points

maximalement réparti : tous les mots cumulés ont au plus deux entiers et ils sont consécutifs

k=1 (3 3 2 3 3 2 3 3 2)

k=2 (6 5 5 6 5 5 6 5 5)

k=3 (8 8 8 8 8 8 8 8)

k=4 (11 11 10 11 11 10 11 11 10)

k=5 (14 13 13 14 13 13 14 13 13)

k=6 (16 16 16 16 16 16 16 16 16)

k=7 (19 19 18 19 19 18 19 19 18)

k=8 (22 21 21 22 21 21 22 21 21)

k=9 (24 24 24 24 24 24 24 24 24)

Réponse 1b = 3 points

impaire rythmiquement : aucune rotation ne donne deux mots de même somme

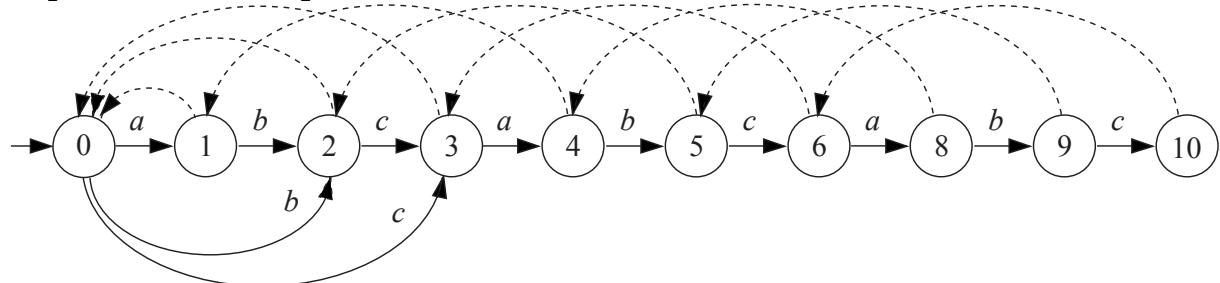
Réponse 1c = 3+3 = 6 points

puissance paire d'un mot -> pas impaire rythmiquement $w = x^kx^k$ avec $h(x^k) = h(x^k)$

puissance impaire d'un mot impair rythmiquement -> impaire rythmiquement $w = x^kxx^k$

supp. $w = uv$ avec $h(u) = h(v)$, $|u| \geq |x^k| \Rightarrow u = x^ky$, $v = zx^k$ avec $x = yz$, donc $h(y) = h(z)$ et x pas impair rythmiquement

Réponse 2a = 2+1 = 2 points



État p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(p)$	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6

Réponse 2b = 2 points

fonction d'échec Morris & Pratt : $abcabcbcabc$

État p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(p)$	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6

-> même fonction que précédemment.

Réponse 3a = 2 points

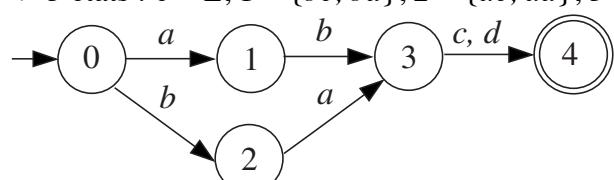
$$a^{-1}L = \{bc, bd\}, b^{-1}L = \{ac, ad\}$$

$$b^{-1}\{bc, bd\} = a^{-1}\{ac, ad\} = \{c, d\}$$

$$c^{-1}\{c, d\} = d^{-1}\{c, d\} = \{\epsilon\}$$

Réponse 3b = 2 points

-> 5 états : $0 = L$, $1 = \{bc, bd\}$, $2 = \{ac, ad\}$, $3 = \{c, d\}$, $4 = \{\epsilon\}$



pas jeu de dés, car a et b conduisent vers deux états différents