**Master ATIAM – 25 février 2009**

## MMIM : Modèles mathématiques pour l'informatique musicale

*Partie I : Informatique théorique*

Marc Chemillier

Cette partie sera rédigée sur une copie à part. Elle est notée sur la moitié de la note finale. Tous les documents sont autorisés. Durée complète de l'épreuve (comportant deux parties) : 2 heures.

**Question 1**

**1a-** Donner l'élément minimal pour l'ordre alphabétique parmi les permutations circulaires du mot $u$ = *abaabaaba*.

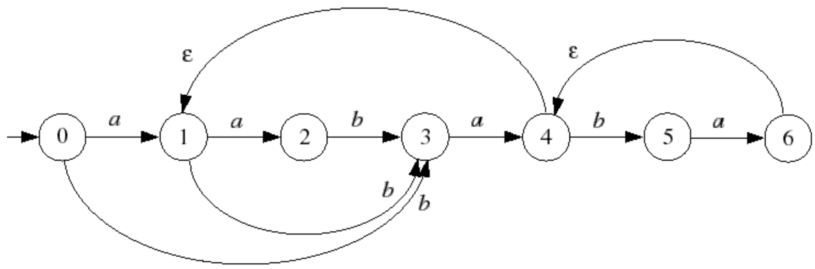
**1b-** Si $u$ est un mot, on rappelle qu'on note $u$~ le mot *miroir*, c'est-à-dire le mot ayant les mêmes lettres que $u$ disposées en ordre inverse. On dit que $u$ est *palindrome* si $u$ = $u$~. Montrer que si $u$ est palindrome et s'il comporte au moins deux lettres distinctes, alors $u$ n'est pas minimal pour l'ordre alphabétique parmi ses permutations circulaires.

**1c-** Exprimer ($uv$)~ en fonction de $u$~ et de $v$~. En déduire que si $u$ est palindrome et périodique $u = x^n$, alors $x$ est aussi palindrome. Donner $x$ dans le cas **1a**.

**Question 2**

**2a-** Tracer l'oracle des facteurs du mot $u$ = *aababa* avec tous ses liens suffixiels. Existe-t-il des mots reconnus par l'oracle qui ne sont pas facteurs de $u$ ? [rappel : « reconnaître » signifie ici qu'on parcourt l'oracle sans utiliser les liens suffixiels].

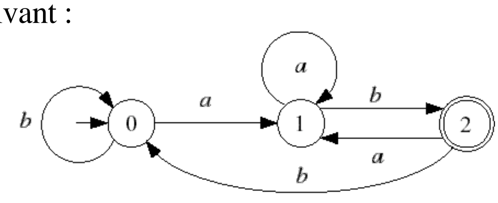
**2b-** On considère un nouvel automate obtenu à partie de l'oracle précédent en transformant deux de ses liens suffixiels en ε–transitions :




En utilisant la construction vue en cours, supprimer les ε–transitions de cet automate.

**Question 3**

On considère l'automate suivant :




**2a-** Calculer la table de transition jusqu'aux mots de longueur 2 et 3. En déduire qu'il n'existe que quatre relations distinctes sur les états {0, 1, 2} engendrées par $a$ et $b$.

**2b-** Calculer la table d'addition du monoïde fini associé à l'automate [on n'oubliera pas d'ajouter aux quatre éléments précédents la relation identité notée *Id*]. Quel est l'élément du monoïde correspondant aux mots reconnus par l'automate ?

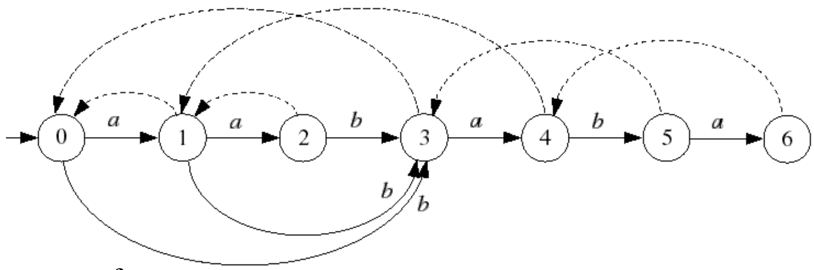
**2c-** On dit qu'un élément $e$ d'un monoïde est *idempotent* si $e^2 = e$. Donner les trois éléments idempotents du monoïde précédent (sans compter l'identité). Pour un idempotent $e$, il est évident que l'ensemble $\{Id, e\}$ forme un sous-monoïde à deux éléments. Indiquer un sous-monoïde à trois éléments.

**Réponse1a**
*aabaabaab*

**Réponse1b**
Supposons $u$ minimal, soit $a$ la plus petite lettre de l'alphabet apparaissant dans $u$
deux lettres distinctes => $u$ s'écrit $a^n bv$
$u$ palindrome => $v$ s'écrit $wba^n$
mais $a^n a^n bwb$ est une permutation de $u$ plus petite que $u$, faux

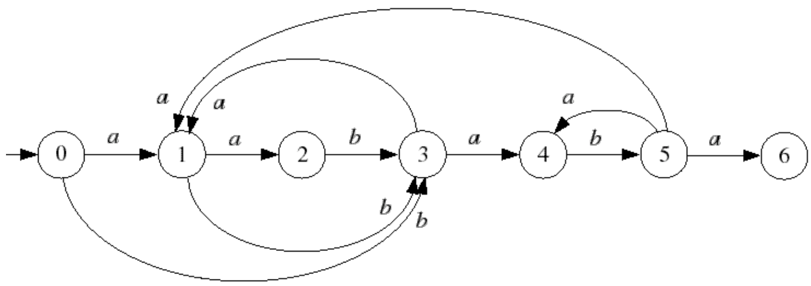
**Réponse1c**
$(uv)\sim = v\sim u\sim$
$u = x^n$ => $x$ préfixe de $u$
$u\sim = (x^n)\sim = (x\sim)^n = u$ => $x\sim$ préfixe de $u$
même longueur => $x = x\sim$

**Réponse2a**




pas de mot reconnu non facteur

**Réponse2b**




**Réponse3a**

| | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 1 | 1 | |
| $b$ | 0 | 2 | 0 | |
| $a^2$ | 1 | 1 | 1 | $= a$ |
| $ab$ | 2 | 2 | 2 | |
| $ba$ | 1 | 1 | 1 | $= a$ |
| $b^2$ | 0 | 0 | 0 | |
| $a^3$ | 1 | 1 | 1 | $= a$ |
| $aab$ | 2 | 2 | 2 | $= ab$ |
| $aba$ | 1 | 1 | 1 | $= a$ |
| $ab^2$ | 0 | 0 | 0 | $= b^2$ |
| $baa$ | 1 | 1 | 1 | $= a$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *bab* | 2 | 2 | 2 | = *ab* |
| *bba* | 1 | 1 | 1 | = *a* |
| $b^3$ | 0 | 0 | 0 | = $b^2$ |

4 éléments plus l'identité = {*Id, a, b, ab*, $b^2$}

**<u>Réponse3b</u>**

| | *Id* | *a* | *b* | *ab* | $b^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *Id* | *Id* | *a* | *b* | *ab* | $b^2$ |
| *a* | *a* | *a* | *ab* | *ab* | $b^2$ |
| *b* | *b* | *a* | $b^2$ | *ab* | $b^2$ |
| *ab* | *ab* | *a* | $b^2$ | *ab* | $b^2$ |
| $b^2$ | $b^2$ | *a* | $b^2$ | *ab* | $b^2$ |

Mots reconnus : *ab*

**<u>Réponse3c</u>**

Eléments idempotents = {*Id, a, ab*, $b^2$}

*b* n'est pas idempotent, sous-monoïde à trois éléments : {*Id, b*, $b^2$}